Actividades de natureza investigativa nos primeiros anos de escolaridade

Ana Maria de Jesus
Escola EB1/JI de Santo António dos Cavaleiros

Lurdes Serrazina
ESE de Lisboa

Introdução

Vivemos num mundo em permanente mudança que nos exige cada vez maior flexibilidade e capacidade de adaptação. Hoje em dia, outras exigências de saberes e competências e novos modos de estar e agir emergem como essenciais. Pensar de forma autónoma, interpretar uma situação nova, demonstrar persistência na resolução de um problema, trabalhar em equipa, interagir com os outros, são algumas competências fundamentais a considerar. Aprender em continuidade é uma necessidade que se impõe cada vez mais. A escola pode e deve exercer um papel fundamental neste processo de aprendizagem, propiciando aos alunos experiências matemáticas que sejam autênticos desafios intelectuais com sentido para os mesmos e realizados com prazer. No decurso das actividades, a obtenção de um êxito, por muito insignificante que possa parecer, constitui um ponto de apoio para o aluno ir adquirindo confiança nas suas capacidades para a Matemática. Esta auto-estima é decisiva para modelar o seu comportamento futuro (Associação de Professores de Matemática, 1988). A motivação intrínseca na realização da tarefa leva o aluno a aceitar correr riscos para melhorar o seu desempenho. Assim, procura compreender a tarefa, em vez de, simplesmente, pretender obter o resultado 'certo' e não receia errar ou dizer as coisas de modo imperfeito ou incompleto porque está ciente que é um aspecto inerente à própria aprendizagem (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999).

No entanto, de acordo com Ponte e Serrazina (2000), a Matemática no 1º ciclo da educação básica continua associada ainda nalguns casos, especificamente, ao domínio de competências elementares de cálculo, nomeadamente, aos algoritmos das quatro operações. Nesta perspectiva, a aprendizagem a que os alunos estão sujeitos privilegia a memorização e a prática repetitiva de exercícios, o que os leva a adquirirem uma visão simplista da Matemática e os impede de perceberem que existem outras estratégias e formas alternativas de resolver os problemas. Apesar de ser importante alguma proficiência nos algoritmos de cálculo com papel e lápis, este conhecimento deve emergir de situações problemáticas em que surja a necessidade das referidas técnicas (National

Council of Teachers of Mathematics, 1991). Se queremos desenvolver nas crianças o gosto e a confiança pessoal em realizar actividades intelectuais que abrangem o raciocínio matemático parece ser importante alterar práticas pedagógicas, ainda, implementadas nas nossas escolas. É neste quadro que surge a questão: de que modo alunos do 3º ano de escolaridade básica se envolvem em actividades matemáticas de natureza investigativa, em que, perante uma questão experimentam estratégias alternativas, discutem com o par, testam e verificam as suas ideias, e comunicam os seus raciocínios aos colegas e ao professor? O estudo realizado procurou compreender o seu envolvimento e dar algumas respostas. Neste artigo, apenas, nos focalizaremos nas seguintes questões:

1. Como é que os alunos reagem perante tarefas de natureza investigativa?
2. Qual o seu envolvimento quando realizam actividades matemáticas de natureza investigativa?

Aprender Matemática, compreendendo

As crianças, mesmo antes de entrar para a escola, são confrontadas com múltiplas experiências muito simples do dia-a-dia. Na sua curiosidade natural, procuram o sentido do mundo ao seu redor. Perante um problema importante para elas, inventam espontaneamente as suas próprias estratégias e procuram activamente um processo para o solucionar (Baroody e Wilkins, 1999). A partir da observação, da análise, da tentativa e erro, e das respectivas conclusões a que chegam, as crianças descobrem a Matemática. Intuitivamente, desenvolvem competências e têm sucesso como 'resolvedoras' de problemas (Worth, 1990). Também (Bransford, Brown e Cocking, 2000), afirma que desde muito cedo as crianças demonstram um grande desejo de se envolver em situações de aprendizagem intencional desenvolvendo, deste modo, compreensões sofisticadas acerca de fenómenos que acontecem ao seu redor.

Na verdade, as crianças não são 'quadros vazios' (tese aceite durante muito tempo pelos psicólogos), à espera de serem gradualmente preenchidos quando entram para a escola. São seres activos que constroem, modificam e integram ideias, interagindo com o mundo físico, com os materiais e com outras crianças (Baroody e Wilkins, 1999; Bransford *et al.*, 2000). Neste sentido, a aprendizagem é um processo de construção activa do conhecimento por parte das crianças e, assim sendo, deve-se promover a vivência de experiências concretas. Porém, para Abrantes *et al.* (1999), os alunos aprendem, muitas vezes, regras e procedimentos matemáticos sem qualquer compreensão do seu significado e, ao depararem-se com uma situação ligeiramente diferente da usual, não são capazes de a resolver. De acordo com esta ideia, os mesmos autores sublinham que "a ausência de elementos de compreensão, raciocínio e resolução de problemas nas actividades dos alunos pode ser mesmo responsável por grande parte das dificuldades que muitos sentem em realizar procedimentos aparentemente simples" (p. 25).

Segundo Bransford *et al.* (2000), os currículos enfatizam, frequentemente, a memorização em vez da compreensão cerceando, assim, a oportunidade dos alunos compreenderem os temas abordados nas aulas. O mesmo autor acrescenta que os manuais utilizados estão cheios de factos na expectativa de serem fixados e, consequentemente, a avaliação valoriza a capacidade de memorizar. Refere a importância do conhecimento de factos para pensar e resolver problemas, contudo, alerta para a insuficiência de se adquirir conhecimentos acerca de uma grande quantidade de assuntos, desprovidos de qualquer relação entre si. Assegura, inclusive, que estudos recentes têm mostrado que "o conhecimento utilizável não é o mesmo que uma mera lista de factos desconexos" (p. 9). Pelo contrário, está organizado à volta de conceitos importantes, condicionado a contextos específicos nos quais é aplicável, e comporta compreensão e transposição (*transfer*) para outros contextos, em vez da mera capacidade de relembrar. Deste modo, os alunos que compreendem são capazes de reter o que aprendem e de transpor para novas situações, condição essencial para a resolução de novos problemas em que se empregam estratégias anteriormente utilizadas (Hiebert e Carpenter, 1992). Recorrendo simplesmente à memorização, apenas ficam habilitados a resolver tarefas já conhecidas, fracassando em momentos diferentes dos habituais. Como referem Abrantes *et al.* (1999) "não se aprende de uma vez por todas" (p. 26), dado que a aprendizagem é um processo gradual de compreensão e aperfeiçoamento, em que se estabelecem relações entre o conhecimento anterior e o adquirido.

Assim, perspectivar uma aprendizagem da Matemática com compreensão requer que a mesma seja encarada como um processo dinâmico que permite aos alunos escolher e avaliar estratégias, considerar meios e receber *feedback*. Pensar, reflectir e discutir ideias em pequenos grupos e com toda a turma sobre as actividades que realizam, gera novas ideias, elabora as existentes e torna-as mais coerentes. Trabalhando em múltiplos contextos os alunos têm maior possibilidade de aperfeiçoar significativamente as suas capacidades para se tornarem aprendentes activos que procuram compreender assuntos e, consequentemente, estar melhor preparados para transferir o que aprenderam para novos problemas e novos cenários (Bransford *et al.*, 2000).

A experiência matemática dos alunos

A Matemática é, comummente, encarada como sendo uma Ciência exacta, infalível e abstracta, ou seja, um corpo estático de conhecimentos. Naturalmente esta perspectiva é, muitas vezes, associada no âmbito escolar à disciplina difícil do certo ou errado, em que é preciso praticar muitos exercícios, dominar regras e técnicas para se ser bem sucedido. No entanto, esta é uma visão parcial e empobrecida da Matemática. Bransford *et al.* (2000) refere que em contraste com a opinião dos que acreditam que a Matemática se limita a técnicas de cálculo, os matemáticos as vêem como simples ferramentas na verdadeira essência do que é Matemática. Em consonância com tal afirmação, George Pólya (2003), acredita que a experiência matemática do aluno pode ser similar à dos profissionais desta área, conferindo uma atenção particular ao raciocínio do tipo indutivo, associando-o à aprendizagem a partir da experiência, sem, contudo, desvalorizar o ensino do raciocínio dedutivo. Para Pólya, os dois tipos de raciocínio são complementares e, por isso, devem ser ensinados em paralelo.

Se pretendemos que os nossos alunos vejam a Matemática como conhecimento em permanente construção, é fundamental que os mesmos experimentem, desde o início da escolaridade, momentos parecidos ao trabalho dos matemáticos. A resolução de problemas pelas suas características pode propiciar uma experiência de aprendizagem interactiva que desperta a curiosidade e proporciona a descoberta. Aproximar o trabalho dos alunos ao dos matemáticos concede uma relevância acrescida no desenvolvimento por parte destes, da compreensão da Matemática que aprendem, na confiança nas suas aptidões, para pensar e comunicar matematicamente, na tomada de decisões adequadas para a escolha de estratégias. Assim, usar a resolução de problemas como ponto de partida para discussões matemáticas permite ajudar os alunos a aprender a pensar matematicamente (Schoenfeld, 1996). E com base na ideia de 'pensar matematicamente', tal noção é alargada, assumindo importância fundamental, as investigações matemáticas realizadas pelos alunos na sala de aula, onde se valoriza um conjunto de processos como formular, testar e provar conjecturas, argumentar e usar procedimentos de natureza metacognitiva (Abrantes, Leal e Ponte, 1996). De acordo com Ponte (2003), realizamos uma investigação matemática quando tentamos dar respostas de modo organizado e claro a questões que nos interessam, embora, no princípio, nos pareça algo confuso.

Apesar de os dois termos, resolução de problemas e investigações matemáticas, serem, possivelmente, usados com o mesmo sentido por não existir uma fronteira muito nítida entre si, é consentâneo que ambos se referem a processos matemáticos complexos e implicam o envolvimento e a criatividade dos alunos (Abrantes *et al.*, 1996; Ponte e Matos, 1996). Também apelam à imaginação e requerem capacidades que não se limitam ao cálculo e à memorização de definição e procedimentos (Ponte, 2003). Nesta linha de pensamento e porque o que, realmente, importa é desafiar os alunos a viverem momentos ricos na sala de aula, no estudo no qual se baseia este artigo, optamos por designar actividade matemática de natureza investigativa, a experiência de aprendizagem que permite à criança, quando confrontada com uma questão, considerar estratégias alternativas, discutir com o par, testar e verificar as suas ideias, e expressar as suas conclusões aos colegas e ao professor. Neste tipo de actividades é preciso ter em atenção a dinâmica da sala de aula que assume especial relevância para que a criança construa de forma significativa o seu próprio saber.

Criando um ambiente participado na aula

Sendo a aprendizagem um processo interactivo, há que considerar a necessidade de se criar um ambiente onde todos os alunos se sintam confiantes, partilhem pensamentos, troquem opiniões, justifiquem e defendam as suas ideias. Um contexto assim contrasta com as aulas convencionais, nas quais, os professores interagem com os alunos somente para corrigir as suas respostas erradas ou para explicar um processo (Cuban, 1993, citado em Wood, Merkel e Uerkwitz, 1996). Para conseguir um ambiente de aprendizagem no qual as crianças percebam que comunicar o seu próprio pensamento sobre Matemática é de importância primordial, é preciso renegociar um conjunto de obrigações e expectativas para interagir como membros constituintes da comunidade formada pela turma e professor. Logo no início do ano lectivo o professor e os alunos, a partir de debates sobre respeito e justiça, discutem ideias para tornar a aula um bom local de trabalho e decidem quais são os comportamentos aceitáveis e os que não são (Wood *et al.*, 1996).

Segundo Yackel, Cobb, Wood, Wheatley e Merckel (1991), as crianças na sala de aula aprendem normas implícita ou explicitamente que irão influenciar a maneira como elas interagem com o professor e com os colegas e, consequentemente, com a aprendizagem da Matemática. Para César, Torres, Rebelo, Castelhano, Candeias, Candeias, Caçador, Coração, Gonçalves, Sousa, Malheiro, Fonseca, Martins e Costa (2000), as crianças interiorizam regras como, por exemplo, os professores ensinam e os alunos aprendem, os professores fazem perguntas e os alunos respondem, que não são explicitadas, mas sim, transmitidas socialmente. Torna-se, então, pertinente uma abordagem pedagógica na qual se dá atenção explícita ao papel da interacção social na aprendizagem da Matemática pelas crianças, que sustente uma atmosfera de sala de aula conducente à resolução de problemas e inquirição. Neste sentido, o contrato didáctico, entendido como um conjunto de regras estabelecidas entre os diversos sujeitos que interagem na sala de aula, preenche um papel essencial. Se o professor quer implementar formas inovadoras de trabalho na aula que pressupõem regras diferentes das habituais, então, é necessário alterar o contrato didáctico mais tradicional e, explicitar algumas regras:

> os alunos devem ajudar-se mutuamente, devem formular conjecturas e testá-las, devem saber explicar aos colegas o que pensaram e como resolveram as tarefas que lhes foram propostas, devem pôr questões aos colegas que estão a explicar as resoluções que fizeram sempre que não as tenham percebido (p. 55).

Assim, não compensa responder ao acaso para ver se acertaram, pois, é sempre necessário explicar como o aluno pensou. Estas regras são fundamentais para alterar a atitude dos alunos face à Matemática, nomeadamente ao papel do professor e dos alunos (César *et al.*, 2000). Num clima de confiança e respeito, cada criança sente que é um elemento valioso na aula e tem ideias importantes para partilhar, podendo expressá-las sem receio de ser alvo de troça ou vergonha, caso cometam algum erro. Por sua vez, o professor ouve cuidadosamente o que as crianças dizem e incentiva-as a exprimir as suas ideias (Wood *et al.*, 1996). Assim, os alunos e o professor complementam-se de forma a diluir a assimetria existente entre o papel desempenhado por ambos.

Metodologia

No presente estudo há a preocupação em perceber o modo como os alunos do 3º ano de escolaridade se envolvem em actividades de natureza investigativa. De acordo com a opção que fizemos, numa actividade matemática de natureza investigativa, os alunos partem inicialmente de uma questão desafiante, consideram estratégias alternativas, discutem com o par, testam e verificam as suas ideias e depois comunicam, discutem e reflectem com toda a turma.

Nesta perspectiva, seguimos uma metodologia de investigação de natureza qualitativa porque, segundo Bogdan e Bicklen (1994), a) ocorre num contexto natural de trabalho e pretende descrever essa realidade e b) existe uma preocupação com os processos e com os significados atribuídos pelas crianças à situação. Uma investigação qualitativa é caracterizada como sendo descritiva, procurando a compreensão e não a avaliação, tendo como fonte directa o local de investigação, visto que toda a acção pode ser melhor compreendida se for observada no seu ambiente, sendo o investigador, o instrumento chave. Assim, foi possível observar e ouvir os alunos no seu contexto de sala de aula, procurando compreender as situações vividas em ambiente natural, com o intuito de através de instrumentos de recolha de dados proporcionados descrever a realidade em estudo. Procurou-se compreender algo específico sem intenção de generalizar os resultados, mas estudá-los com a profundidade possível e, tendo como objectivo a descrição detalhada e a interpretação dos fenómenos (Stake, 1999). Neste sentido, optamos pelo estudo de caso.

Procurando seguir as recomendações de Yin (1989), no sentido de que os estudos de caso não se limitem a uma única fonte de evidência, recorremos a uma diversidade de fontes de informação: observação participante, gravações áudio e vídeo das aulas e fichas de trabalho. As conversas informais com os alunos ocorridas ao longo do ano foram, também, um contributo bastante precioso.

Neste estudo, as observações permitiram acompanhar de perto as diversas experiências dos alunos e compreender melhor, aspectos dificilmente acessíveis por outras técnicas. Os dados foram recolhidos pela própria professora da turma que foi também investigadora (a primeira autora deste texto). Nesta circunstância, não era exequível anotar grande parte dos acontecimentos. Houve, então, a preocupação de registar imediatamente no final de cada aula, os episódios mais significativos com o máximo de detalhes possíveis. Procurou-se ultrapassar tal limitação complementando, posteriormente, as notas das aulas com os registos de áudio e vídeo permitindo, assim, uma compreensão mais esclarecedora do objecto de estudo. A câmara de vídeo foi instalada num canto da sala para que os alunos se abstraíssem dela, mas que possibilitasse a visão de grande parte da turma, com maior incidência nos alunos a observar. Em cada mesa de trabalho, dispunha-se de um gravador.

Os alunos observados foram os pares que designaremos por: Elisa/Filipe e Júlia/David. A sua escolha teve em conta, uma capacidade razoável de comunicação escrita e oral, uma boa relação de trabalho entre si, a mesma idade, que não fossem repetentes nem do mesmo sexo. Relativamente aos desempenhos a Matemática, referidos nos registos de avaliação do ano lectivo anterior, Filipe integrava o grupo dos bons alunos e Elisa dos fracos. Júlia e David, dos satisfatórios. Faziam parte de uma turma do 3º ano, formada por 20 alunos, dos quais 11 eram raparigas e os restantes, rapazes que, apenas, neste ano lectivo (iniciado há menos de um mês) era leccionada pela primeira das autoras deste texto. A faixa etária situava-se entre os 8 e 10 anos de idade e eram, maioritariamente, de estratos sociais médios.

As aulas objecto de gravação para recolha de dados foram aquelas em que se realizaram as tarefas propostas. Estas tarefas inserem-se nas temáticas do bloco "Números e

Operações" do programa do 3º ano de escolaridade (ver anexo) e foram apresentadas individualmente em forma de ficha em folha A4, tendo cada aluno tido acesso a um exemplar. A análise das fichas de trabalho realizadas pelos alunos permitiu obter informações sobre o desempenho dos mesmos em actividades de natureza investigativa. Embora do estudo tenham feito parte mais tarefas, neste artigo só serão analisadas cinco.

Após o trabalho de campo, numa primeira fase, realizamos a transcrição de momentos importantes das gravações áudio e vídeo e, posteriormente, complementámo-los com uma leitura cuidada de todo o material recolhido (transcrições das aulas, registos de observação, fichas produzidas pelos alunos) e visionamento dos vídeos. Da triangulação destes dados, procurou-se retirar evidências que nos permitam compreender como os alunos reagem perante tarefas de natureza investigativa e o tipo de envolvimento nessa actividade.

Na apresentação dos resultados, optamos por iniciar com uma breve caracterização individual de cada um dos alunos escolhidos. Depois, descrevemos e analisamos o envolvimento do par e a relação que o mesmo estabeleceu com a turma, tendo em atenção os três momentos de aula sugeridos por Christiansen e Walther (1986), ou seja, a apresentação da tarefa, o desenvolvimento do trabalho e a discussão/reflexão final. Tornou-se difícil separar o par do contexto de turma, pois foi desta maneira que trabalharam na sala de aula. Assim sendo, os pares são situados, por vezes, em interacção com outros colegas.

As crianças e a Matemática

Elisa e Filipe

Elisa

Elisa é uma criança cheia de vida. Gosta de se vestir desportivamente para poder correr, saltar e jogar à bola descontraidamente. Em casa ocupa os tempos livres a ver televisão, ouvir música e jogar no computador. O afecto que sente pelos animais faz com que deseje exercer a profissão de veterinária, quando for mais crescida. Esta faceta sensível contrasta com alguma irreverência que manifestava no início do ano.

Na sua opinião, a escola é um local onde "as professoras ensinam a ler, escrever e fazer contas". O que mais aprecia é a hora do recreio para brincar com o "Pipo", o seu colega de carteira. Afirma ter como disciplinas preferidas, a Matemática, a Língua Portuguesa e o Estudo do Meio.

Durante as aulas distrai-se facilmente e não resiste a um pouco de conversa com os colegas que se sentam mais proximamente. No entanto, quando trabalha a pares mostra--se mais interessada e empenhada na actividade. Contudo, é nas aulas de Educação Física que se sente realmente à vontade, demonstrando uma grande capacidade na realização de destrezas e habilidades gimno-desportivas.

Filipe

Filipe é uma criança irreverente que gosta de ser o centro das atenções. Com esta faceta e com uma série de episódios precedentes de castigos por questões de *indisciplina* era frequente, no início do ano, ouvir os colegas comentarem que tinha estado mais uma vez de castigo no ATL ou no Refeitório. Com grande espírito de liderança e sentindo-se constantemente incompreendido, contestava veementemente quando o contrariavam tornando-se, por vezes, inconveniente. Geralmente era muito competitivo e ficava francamente frustrado e amuado quando perdia. Discutia e argumentava os seus pontos de vista com muita convicção e raramente aceitava que podia não ter razão.

Com o decorrer do ano, o ambiente de sala de aula baseado no respeito mútuo e na valorização do esforço e desempenho dos alunos propicia o desenvolvimento de competências que levam Filipe, gradualmente, a saber ouvir e respeitar os outros.

A Matemática e a Expressão Plástica são as disciplinas preferidas. Em relação à Matemática, demonstra bom cálculo mental e escrito, assim como bom raciocínio e facilidade de desenvolver estratégias adequadas às tarefas propostas. Os trabalhos realizados a Expressão Plástica revelam sentido estético e criatividade.

Envolvimento do par nas actividades: Elisa e Filipe

O passeio de barco

Elisa e Filipe encontram-se sentados lado a lado, no entanto, trabalham individualmente. Após ler atentamente a tarefa (ver anexo), ele pergunta à professora, ainda um pouco incrédulo, se pode resolver a questão a partir de desenhos: "podemos mesmo resolver com desenhos? A sério…!?" Visivelmente animado com a resposta afirmativa, regista de forma icónica o seu pensamento (ver fig. 1). Elisa traça uma tabela e descobre uma das soluções. Mas depois, revelando alguma insegurança, apaga-a.

Filipe, absorto, desenha nove barcos colocando dois amigos em cada um deles. Depois desenha dois barcos e agrupa nove amigos em cada um (ver fig. 1), levantando-se de seguida para mostrar o trabalho realizado. A professora incentiva-o a trocar ideias com o par, mas ele não se mostra receptivo.

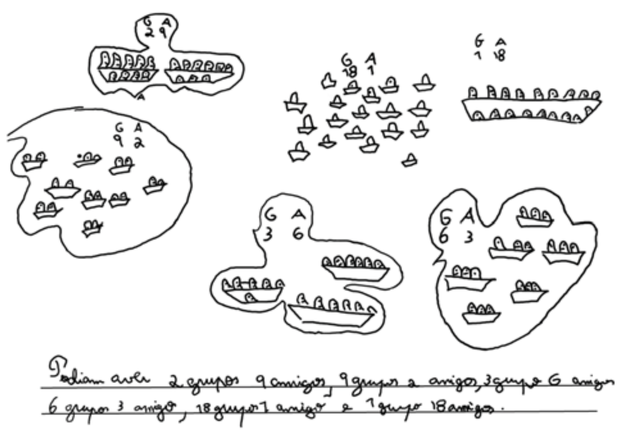
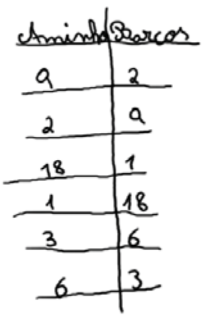


Figura 1 — Estratégia utilizada por Filipe.

Elisa, ciente de não poder contar com a ajuda do Filipe, volta-se para trás, constatando com satisfação que os colegas utilizam a mesma estratégia de resolução, inicialmente, escolhida por ela. Então, mais confiante segue tal opção (fig.2). De vez em quando, ainda observa o trabalho do Filipe por breves instantes (receando que ele a acuse de "copiar", conforme já tinha acontecido), mas sem retorno algum por parte dele.

Entretanto, Filipe chama a professora para que legitime o seu trabalho. Em vez de lhe responder se estava *certo ou errado*, sugeriu que verificasse melhor se estariam todos as maneiras possíveis. Embora um pouco contrariado, continua a desenvolver a actividade tendo em conta a mesma estratégia, acabando por registar todas as soluções possíveis.

Elisa mostra à professora o seu trabalho e, realmente, tinha encontrado as seis soluções possíveis (fig. 2). Ao pedir para explicar como tinha pensado, afirma ter decidido pelo uso da tabela porque alguns colegas já tinham, anteriormente, apresentado essa estratégia de resolução, respondendo que age do mesmo modo porque a tinha "decorado". Naquele momento, permaneceu a dúvida se ela tinha, realmente, percebido ou se tinha aplicado o processo acriticamente.



[illegible]	Barcos
9	2
2	9
18	1
1	18
3	6
6	3

Figura 2 — Tabela usada por Elisa.

Na fase final da actividade, ou seja, na discussão com a turma, após ouvir o par Júlia e David, há algum alvoroço na turma porque alguns alunos não percebem como é possível ir um amigo em dezoito barcos. Elisa (E), bastante entusiasmada, dirige-se ao quadro para ajudar a clarificar a questão. Assim, traça dezoito riscos verticais simulando os barcos e explica, embora um pouco desajeitada, que cada menino ia num deles. Deste modo, parece mostrar compreensão sobre o assunto:

> E: Há 18 barcos, e cada menino vai num barco. Um aqui … um aqui … um aqui …

Filipe (F) diante do impasse estabelecido, dado a situação não ser ainda completamente clara para todos, intervém expeditamente, decidido a dar uma explicação mais detalhada. Desenha no quadro os dezoito barcos, coloca em cada um deles um único menino e tenta interagir com Nelson (N), um dos alunos da turma que manifesta não ter, ainda, compreendido:

F: Eu fiz assim . . . pus um "b" de barco e também pensei como o Nelson que eram 18 amigos num só barco . . . ai . . . 1 amigo e 18 barcos . . . mas depois . . .

N: Mas depois deixaste ficar o "b" . . .

F: Posso explicar?

N: Sim.

F: Mas depois, pensei melhor e pus aqui um "G" de grupo . . . grupos de 18 amigos . . . e "A" de amigos (ver fig. 1).

Não permitindo qualquer interrupção, continua a explicitar o seu pensamento através de cálculos subtractivo e multiplicativo:

F: Encontrei seis maneiras diferentes de agrupar os amigos nos barcos. Primeiro, fiz de "cabeça", metade de 18 é 9. Então podem ir 9 amigos em 2 barcos. Depois vi que também podia ser 9 barcos e cada um levava 2 amigos. Depois . . . achei que era a resposta, mas como a professora disse para pensar melhor, pensei . . . e vi que, se fizesse com 3 barcos e em cada um, seis amigos, também dava, porque 3×6 é 18. Experimentei com 6 barcos e em cada um, 3 amigos. Pensei melhor para ver se faltava alguma maneira, e vi que podia também haver 18 barcos e um amigo, ou um barco e 18 amigos.

Elisa comenta que resolveu a questão da mesma maneira que a apresentada por Júlia e David, mostrando timidamente a sua folha de trabalho, onde revela o seu conhecimento matemático, neste caso, os divisores de 18.

De regresso ao lugar, Filipe intrigado com o desempenho da colega não queria acreditar que ela sozinha pudesse ter resolvido a tarefa com sucesso. Então, queixa-se: "mas professora, a Elisa fez *ó calhas . . .* ". Filipe considerava que apenas ele possuía os conhecimentos matemáticos necessários para a resolução do problema.

No refeitório

Logo após a leitura da tarefa (ver anexo), Filipe inicia individualmente o trabalho, mas antes, pergunta se pode usar desenhos como abordagem de resolução. Mostra-se contente por tal ser permitido e, bastante compenetrado na sua actividade, traça uma linha vertical, dividindo a folha em duas partes. De um lado, desenha vinte e quatro meninos agrupados em subconjuntos de seis, do outro, dezoito meninos subdivididos em dois grupos. Seguindo uma estratégia icónica, vai desenvolvendo o seu raciocínio, autonomamente (fig. 3).

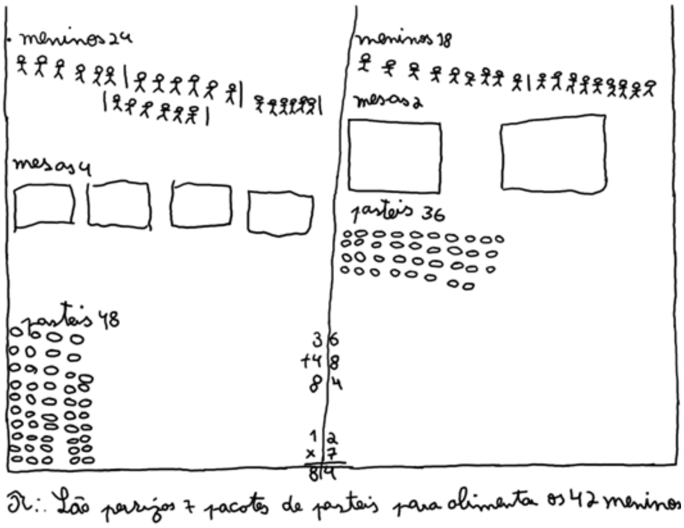


Figura 3 — Abordagem de Filipe.

Elisa lê várias vezes a tarefa. Aparentando alguma dificuldade, tenta utilizar o desenho como forma de resolução. Delineia na folha de trabalho alguns círculos, possivelmente para representar as mesas, mas sem sucesso, pois de seguida, fica sem saber como continuar. Esmorecida olha para o Filipe que esbraceja alegremente por ter finalizado o trabalho, clamando: "*yes, yes!*" Contudo, sensibilizado com o desânimo estampado no rosto da colega, prontifica-se a ajudá-la:

F: Onde é que estás com dificuldade?

E: É nos meninos.

F: Porque é que não fazes como eu?

E: Como é que fizeste?

F: Vá ... meninos, primeiro ... conta aqui no refeitório ... 4 mesas com 6 alunos e 2 mesas com 9. Primeiro comecei por fazer meninos da primeira, e fiz a conta. E são 24 meninos da primeira.

Com este pequeno diálogo se pode ver que apesar das dificuldades, a Elisa continua interessada e quer perceber de que forma pode resolver a questão. Por sua vez, o Filipe tenta explicar-lhe o seu raciocínio, que ela consegue seguir, e começa a desenhar as mesas e os meninos. Ao sentir a presença da professora mostra, rapidamente, os seus registos (ver fig. 3) e, com entusiasmo, relata todo o percurso seguido. Elisa escuta atentamente e parecendo um pouco mais animada, descreve também o que já tinha feito. Encorajados a partilharem ideias, Filipe verifica o trabalho da colega e explica-lhe as etapas a seguir, procurando que ela perceba:

F: Cada menino comia 2 pastéis. O que tens que fazer agora?

E: Multiplicar 24 por 2.

F: Então, vá lá. 24×2?

E: $24 \times 2 \ldots$

F: É a mesma coisa que $24 + 24 \ldots$

A aluna tem dificuldade em calcular mentalmente e Filipe sugere que faça o algoritmo:

F: Então, tens que fazer a conta. É?

E: 48.

F: Certo! Então quantos pastéis tens de fazer?

E: 48.

Atenta ao trabalho, desenha os pastéis. Filipe continua a dar atenção ao par:

F: Agora vamos passar a esta parte. Mesas . . . quantas é que são?

E: 2 mesas com 9 meninos.

F: Então, são quantos pastéis? Se ali foi o dobro de 24, aqui o dobro de 18 é?

E: O dobro é . . .

Perante a hesitação ele começa a ficar um pouco impaciente, mas não desiste, antes, insiste para que Elisa obtenha o dobro de dezoito. O seguinte diálogo é elucidativo:

F: O dobro de $18 \ldots 18 \times 2 \ldots 18 + 18 \ldots 18 \times 2$. Vá, vamos lá fazer a conta . . . $2 \times 8 \ldots$

E: 16.

F: E vai . . .

E: 1.

F: Já está? Quantos é que são?

E: 36 pastéis.

Elisa desenha os pastéis, seguindo as orientações do Filipe. Porém, este aluno não se limita a transmitir as etapas que a colega deve seguir, mas sim, tenta que ela compreenda aquilo que faz. Deste modo, coloca-lhe questões que a levam a pensar:

F: Agora temos que fazer o número de pastéis ao todo. O que é que temos de fazer? Os dois grupos de pastéis . . .

E: $36 + 48$.

F: Agora faz a conta.

E: 84.

F: Agora qual é o número vezes 12, cada pacote só tem 12, que vai dar 84?

A aluna sente alguma dificuldade em dizer os múltiplos de doze e começa a contar, lentamente, acrescentando unidades. O colega, mais apressado, adianta-se e acaba por realizar a contagem toda, evidenciando bom cálculo mental.

E: 12 ... 13 ... 14 ... 15 ...

F: 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84. Então 12×7 ... vê lá agora ... tem que dar 84.

Pela forma como a acompanhou, apesar de no fim ter alguma pressa em ver o trabalho de Elisa terminado, evidencia um sentido de cooperação. Com efeito, quando ela termina de executar o algoritmo da multiplicação, exclama: "Pronto! Está bem!" E sorridente dá um grande abraço à colega.

Logo de seguida, começa a discussão alargada a toda a turma. Desejosos por este momento querem ser os primeiros. Assim, Filipe começa por dizer os tipos de representações que utilizaram para a consecução da tarefa, mostrando que consegue com desenvoltura efectivar uma diversidade de estratégias.

F: Nós fizemos através de desenho, com palavras e contas. Primeiro fizemos as 4 mesas com os 6 alunos. Então fizemos 4 mesas e fizemos $6 + 6 + 6 + 6$, 6×4 e deu-nos 24. Depois, cada menino comeu 2 pastéis e fizemos 24×2 e deu-nos 48. Depois, 2 mesas com 9 alunos. Fizemos 9, duas vezes e deu-nos 18. E outra vez, cada aluno comeu 2 pastéis e fizemos $18 + 18$ e deu-nos 36 pastéis. Depois queríamos saber ao todo, quantos pastéis?

É interessante verificar que Filipe não está tão individualista e até emprega o plural enquanto expõe as ideias. Por outro lado, Elisa mostra vontade de participar e Filipe incentiva-a vivamente a continuar.

E: E $36 + 48$ deu-nos 84.

F: Depois sabíamos que tínhamos que multiplicar 12 por um número para nos dar 84. Fizemos $12 - 24$ ...

E: 40 ...

Vendo a dificuldade da colega em prosseguir com a contagem, recomeça, sem contudo, se aborrecer com Elisa:

F: 12 – 24 – 36 – 48 – 60 – 72 e 84. E fizemos $\times 7$ que dá 84. E a nossa resposta foi ...

E: São precisos 7 pacotes de pastéis para alimentar os 42 meninos.

Ao lado do Filipe, Elisa sente mais segurança e parece francamente satisfeita e motivada. Filipe mobiliza com segurança conceitos matemáticos, como o dobro, os múltiplos, a adição e a multiplicação.

A viagem de comboio
Depois de lerem a tarefa (ver anexo) e esclarecerem algumas dúvidas, os dois alunos trabalham, mais uma vez, de modo individual. Filipe pensativo procura uma estratégia a desenvolver. Assim, desenha um veículo e pequenos círculos a representarem os passageiros. Absorto, apaga ou acrescenta passageiros consoante saem ou entram para o comboio (ver fig. 4). Elisa limita-se a olhar para o colega sem entender o que ele faz.

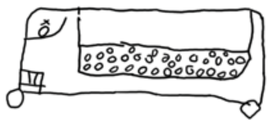


Figura 4 — Os passageiros que entraram em Viana de Castelo.

Repentinamente e completamente efusivo, ele exclama: "Já sei! Professora, já sei, *yes, yes*!" Ao ser incentivado a partilhar as suas descobertas com Elisa, esforça-se por explicitar o seu pensamento para que ela o compreenda.

> F: Desenha aí uma carruagem. Agora diz um número qualquer de passageiros. E: Pode ser 15. F: Agora desenha 15 bolinhas a fingir que são os passageiros. Agora segue o que diz o problema: saíram 12, portanto, apaga 12. Lê o que diz a seguir . . . entraram 17 . . . tens que?? . . .

Embora o registo final não seja muito elucidativo, na medida em que só podemos observar os últimos trinta e quatro passageiros que finalizaram a viagem (ver fig. 4), a explicação à turma é convincente.

> F: Eu comecei por desenhar 18 passageiros. Não tinha a certeza se eram esses. Depois apaguei com a borracha os 12 que saíram no Porto. Ficaram 6. Então como entraram mais 17, desenhei esses que entraram. Ficaram 23. Em Coimbra saíram 16, e apaguei. Ficaram 7 e entraram 25. Então desenhei e ficaram 32. Mas, se em Lisboa saíram 34, faltavam 2 e então fiz $18 + 2$ . . . são 20. Desenhei então 20 passageiros, fui verificar e deu bem.

Em relação à discussão final com a turma, Filipe interveio várias vezes, discordando das argumentações dos colegas e convencendo-os das suas.

J e D: A nós deu-nos 48 passageiros. Nós fizemos com contas.

F: Não pode ser! São 20.

J: Então, como é que tens a certeza que são mesmo 20?

F: Querem ver? (faz os cálculos no quadro) São 20 passageiros, menos 12 dá 8, mais 17 que entraram dá 25. Depois, menos 16 dá 9, e mais 25 são 34. Então, só podem ser 20.

D: Pois é, o nosso é que se calhar está mal!

F: Verifiquem lá se com 48, dá . . . Têm de fazer as contas.

D e J: (efectuando os cálculos) Não dá, não . . .

Apesar da sua preferência pela representação icónica, Filipe mostra que consegue ir mais longe e justificar o seu raciocínio com números e operações.

O autocarro da escola
Logo após a leitura da questão (ver anexo), os dois embrenham-se rapidamente na sua realização. Preferindo trabalhar individualmente, Filipe procede da mesma maneira que na tarefa *A viagem de comboio*. Desenha o autocarro e os passageiros que entram, apagando os que saem (ver fig.5).

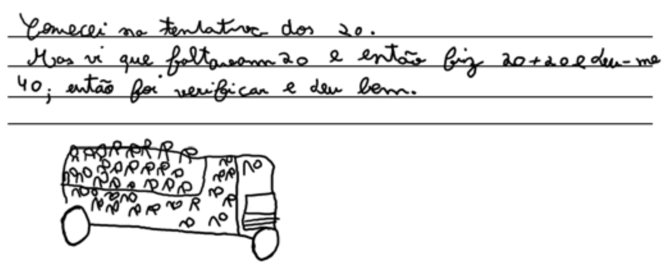


Figura 5 — Alunos que seguiam no autocarro.

No começo Elisa tenta fazer o mesmo, mas depois aparentando alguma hesitação, apaga os registos efectuados e opta por usar uma estratégia com cálculos (ver fig. 6) que tinha sido apresentada por um dos alunos da turma na realização da tarefa anterior.

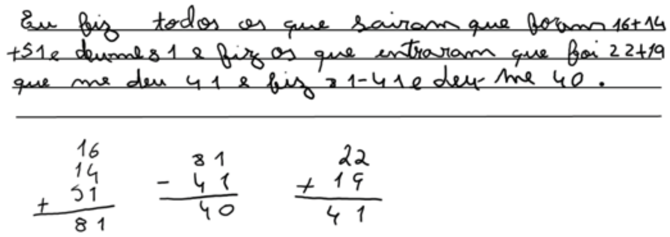


Figura 6 — O número de passageiros.

Elisa relembra-se do processo e perante uma questão similar procede de forma idêntica. É curioso verificar que consegue explicitar o seu raciocínio, mesmo sem a ajuda do par. Entretanto, feliz com o seu desempenho, troca ideias com Filipe sobre o trabalho desenvolvido.

> E: Eu fiz todos os que saíram que foram 16 mais 14, mais 51. Deu-me 41 ... ai ... 81. E fiz os que entraram que foi 22 mais 19 que me deu 41. Fiz 81 menos 41 e deu-me 40.

Elisa mostra, desta forma, que consegue lidar com os números sem necessitar de representação icónica. Parece manipular os números e as operações envolvidas com alguma facilidade conseguindo explicar o que faz.

Filipe afirma que começou tentando com vinte alunos. Nesta abordagem de tentativa e erro idêntica ao problema anterior, preocupa-se também com a verificação do resultado.

> F: Primeiro, comecei na tentativa dos 20. Mas vi que faltavam 20. Então 20, mais 20 são 40. Então fui verificar. Na EB1 Rouxinol saíram 16 ... 40 menos 16 ... 24. E entraram 19. 24 mais 19 ... 43. No colégio Flores saíram 14. 43 menos 14 ... 39. E entraram 22. 39 mais 22 ... 51. No Sabichão saíram todos os alunos que eram 51.

Este tipo de estratégia originou a seguinte observação por parte do David:

> D: Como era um número grande, vocês podiam ter feito por contas ...
>
> F: Nós fizemos por contas, por desenhos ... acho mais giro fazer por desenhos ...

Com efeito, Filipe apresenta novamente uma estratégia icónica porque lhe dá prazer registar desse modo, embora também seja capaz de explicar o raciocínio envolvido de modo claro. Elisa manifesta contentamento por não ter necessitado da ajuda do colega, nem sequer, para comunicar a sua estratégia à turma.

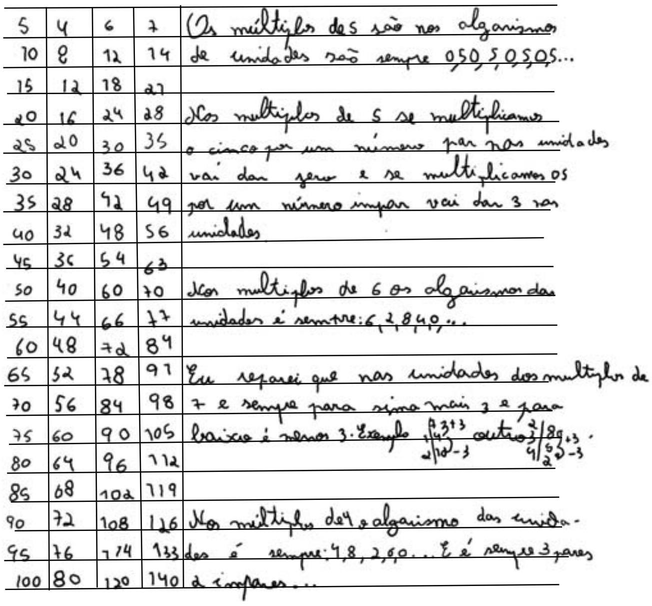
Múltiplos de um número

Após a apresentação da tarefa (ver anexo), a professora faz algumas considerações sobre o que era possível observar, dado ser uma questão bastante aberta.

Assim, começam por escrever os múltiplos de cinco, seis e quatro. De seguida, os dois alunos, embrenham-se em busca de regularidades, partilhando cada uma das suas descobertas.

> E: O algarismo das unidades é o que fica na casinha das unidades ... 0, 5, 0, 5 ...
>
> F: Agora é tudo assim! Vamos para outra ...
>
> E: E a seguir vamos discutir.

O último comentário de Elisa é revelador de que valoriza as interacções com o par e não está, unicamente, à espera que ele lhe comunique as suas descobertas. Assim, continua activamente à procura de regularidades nos múltiplos de seis e quatro. Comunica ao par cada vez que faz uma nova conjectura. Foram alertados para o facto de necessitarem de testar as suas conjecturas. Por vezes, também, concluem que não é válida: "Arg! Não dá! Até aqui parecia . . . " Filipe continua absorvido na actividade e investiga também os múltiplos de sete (ver fig. 7). É curioso verificar que praticamente não apela à validação da professora, depositando confiança em si próprio e de certa forma, na colega.



5	4	6	7
10	8	12	14
15	12	18	21
20	16	24	28
25	20	30	35
30	24	36	42
35	28	42	49
40	32	48	56
45	36	54	63
50	40	60	70
55	44	66	77
60	48	72	84
65	52	78	91
70	56	84	98
75	60	90	105
80	64	96	112
85	68	102	119
90	72	108	126
95	76	114	133
100	80	120	140

Figura 7 — Regularidades nos múltiplos.

No momento de discussão final com a turma, recorrem à projecção de um acetato com os múltiplos de quatro, cinco, seis, e sete, na qual, apresentam entusiasticamente as regularidades encontradas.

> F: Os múltiplos de 5 são nos algarismos de unidades, são sempre 0, 5, 0, 5, 0, 5 . . .
> Se multiplicarmos o 5 por um número par nas unidades vai dar zero e, se multiplicarmos o 5 por um número ímpar vai dar 5 nas unidades.
> Nos múltiplos de 6, os algarismos das unidades é sempre 6, 2, 8, 4, 0 . . .
> Nos múltiplos de 4 o algarismo das unidades é sempre 4, 8, 2, 6, 0 . . .

Elisa também constata que nos múltiplos de quatro, o algarismo das dezenas se repete na sequência de três pares e dois ímpares. Assim, persiste em anunciar a sua descoberta apesar do par a ter desvalorizado.

> E: Acho que ninguém disse esta: na tabuada do 4, há três *números* pares, dois ímpares.
>
> F: Acho que não …
>
> E: É sim, vê lá … nas dezenas …
>
> J e D: É !!!
>
> F: Pois …

Filipe deixa-se convencer sem mostrar constrangimento, percebendo que trabalhar em colaboração permite mais descobertas. A discussão final passa a ser um momento em que se pode aprender com os outros.

> F: Eu reparei que nas unidades dos múltiplos de 7, é sempre para cima mais três e para baixo menos três. Por exemplo: $4+3=7$ e $7-3=4$; $1+3=4$. Agora no 21, não posso dizer 1, mas $11-3=8$. Quando é menos 3, e em cima é um número mais pequeno temos que acrescentar 10 para fazer a conta. Agora, $5+3=8$ e $8-3=5$ …
>
> D: Não percebi, podes repetir?
>
> F: (apontando) É só no algarismo da unidades …

Curiosamente descobre, conforme a disposição registada, na vertical, dos múltiplos de quatro, cinco, seis e sete, que se pode encontrar, fazendo uma leitura na horizontal, múltiplos de um, dois, três, quatro e outros sucessivamente (ver fig. 8), tendo verificado até aos onze.

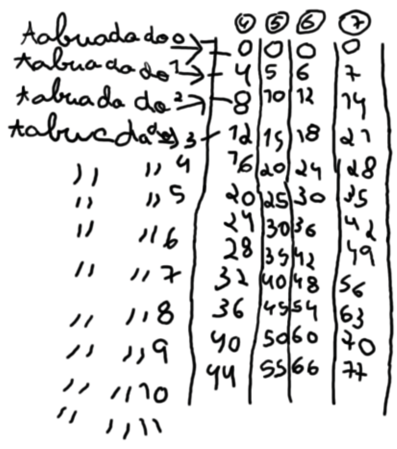


Figura 8 — Regularidades nos múltiplos de 4, 5, 6 e 7.

Elisa mostra-se mais autónoma e segura, e não receia errar. Filipe, apesar de já ter tocado para o recreio, ainda permanece na sala empolgado com a actividade e procurando descobrir mais regularidades. Esta actividade permitiu estimular a capacidade de observação e a criatividade dos alunos, além de evidenciar o domínio do conceito de múltiplo.

Júlia e David

Júlia

Júlia é uma menina extrovertida com um sorriso espontâneo muito peculiar. Tem um grande sentido de justiça, manifestando decididamente a sua opinião sempre que considera oportuno. O carinho que tem pelos animais e, "para poder cuidar deles", leva-a a desejar ser veterinária.

A escola é um lugar que frequenta com agrado. O Estudo do Meio e a Matemática são as disciplinas de que mais gosta, embora participe com prazer em todas as áreas, especialmente a Expressão Musical e Dramática na qual mostra com desenvoltura as suas capacidades expressivas e criativas. O interesse que mostra nas aulas revela gosto pelo saber. Aluna responsável e determinada tem como principal característica a persistência na realização dos trabalhos propostos.

David

David é uma criança sensível e preocupada com o mundo ao seu redor. Deseja viver em harmonia com os outros e sempre que possível evita os conflitos. Na hora do recreio prefere as brincadeiras calmas. Amigo de todos, é honesto e incapaz de prejudicar alguém. Apesar da sua timidez, não admite que façam troça dele. Defende-se, utilizando argumentações convincentes quando se sente incomodado por algum colega mais afoito.

Considera-se um aluno médio a Matemática, embora a veja como uma das disciplinas preferidas. O Estudo do Meio, disciplina a que demonstra um leque alargado de conhecimentos, também faz parte da lista das mais apreciadas. De um modo geral, é um aluno muito empenhado, persistente e responsável, que deseja ser engenheiro quando for grande porque eles "desenham, estudam e fazem projectos".

Envolvimento do par nas actividades: Júlia e David

O passeio de barco
Júlia (J) e David (D) lêem a tarefa individualmente (ver anexo). Passados alguns instantes, ainda continuam a olhar para a ficha admirados com a questão:

J: Descobre todas as maneiras diferentes dos 18 amigos se agruparem nos barcos?! Como?

D: Não diz quantos barcos são ...

Pensativa, Júlia pega no lápis e começa o trabalho escrito. David faz o mesmo. Ambos trabalham por si próprios, sem sequer olharem um para o outro. Entretanto, Júlia solicita a presença da professora dizendo que já tinha acabado e queria o seu parecer:

> J: Professora, eu já fiz. Afinal, foi *muita* fácil. São 9 amigos e vão em 2 barcos.

Incentivada a descobrir outras formas de agrupar os dezoito amigos nos respectivos barcos, exclama com algum espanto: "Outras maneiras de agrupar!? Mas como?" David também parece surpreso, mas não se manifesta. É encorajada a trocar impressões com o par. Então, pergunta à professora se pode mesmo utilizar estratégias alternativas às habituais contas. Satisfeita com a resposta afirmativa, vira-se para o par e dialogam. Retomam a actividade de forma individual mas, de vez em quando, partilham ideias:

> D: Olha, eu acho que também pode ser 9 barcos que levam 2 amigos.
>
> J: Que giro, deu para trocar…
>
> D: É como a tabuada: 9×2 ou 2×9 é igual a 18 …
>
> J: Yá!

O par opta por utilizar uma tabela como estratégia facilitadora da apresentação dos resultados (ver fig. 9). Entusiasmados, comparam as soluções e descobrem novas formas de agrupar. Trabalhando num misto individual e cooperativo, acabam por descobrir as seis combinações.

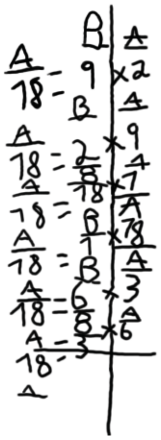


Figura 9 — Tabela representando os barcos e os respectivos alunos.

Chamam novamente a professora para mostrar o trabalho realizado e explicar como tinham feito. Felizes pelo sucesso, ficam ansiosos por comunicar à turma e pedem para serem os primeiros a fazê-lo. Chegado o momento, David comunica oralmente a abordagem utilizada, enquanto Júlia desenha no quadro uma tabela com as diferentes maneiras de agrupar:

D: Nós fizemos, para resolver este problema, fizemos através de um esquema. Fizemos 9 barcos para 2 amigos; 2 barcos, 9 alunos. Para 18 barcos, 1 amigo; para 1 barco 18 amigos; para 6 barcos, 3 amigos; para 3 barcos, 6 amigos.

D: Nós não conseguimos encontrar mais nenhuma solução. Tentamos ainda mais uma, mas depois riscamos porque não podia ser.

Ao desejar que os alunos não se limitassem somente a comunicar ou a ouvir os resultados, mas que interagissem tentando perceber as ideias dos colegas, a professora instiga-os a participarem mais activamente. Assim, aos poucos quebra-se o silêncio e alguns alunos embora um pouco inibidos colocam questões, como o caso de Rute (R) e Andreia (A).

R: Um amigo, como é que vai em 18 barcos?

J: Eu sei. Em 18 barcos ... um amigo.

A: Disseste 1 amigo em 18 barcos ...

J: Sim. Então, são 18 barcos, não é? E vai um amigo, em cada um.

Júlia tenta clarificar melhor desenhando dezoito argolas a representar os barcos, mas Andreia continua com dúvidas e dirige-se ao quadro para explicar melhor o que não entende:

A: Disseste, um amigo! E como é que ele pode ir nos 18 barcos?

Júlia e David esforçam-se por clarificar a situação, desenhando e explicando com perseverança até a Andréia compreender.

A: Eu já percebi! Já percebiii! *Tá bem!*

No entanto, a dúvida persiste para alguns alunos e Rute pergunta:

R: Mas 18 barcos e um menino em cada?? ...

J: São 18 barcos (apontando para a representação) e ia um menino em cada um.

Nelson também não está convencido. Elisa tenta também esclarecer a questão e Júlia complementa o seu raciocínio. Omar (O) acaba por perceber melhor, mas Nádia (N) nem por isso:

J: Há 18 barcos e um amigo em cada um. Um aqui, outro aqui, (...).

O: Eu já percebi!

N: Ainda não me convenci ...

Na sala de aula o ânimo é crescente. Júlia e David não se coíbem de tentar convencer através dos seus argumentos quem ainda está céptico.

> D: Então, é como se tivesses 18 barcos e convidavas 18 amigos. Os barcos eram pequeninos e só pode ir um em cada barco. Um amigo ia num barco, outro no outro . . .
>
> J: Outro no outro . . . e assim . . .

Perante esse impasse Filipe intercede com desenvoltura, elucidando com mais detalhes a estratégia icónica que utilizou para resolver a questão (conforme referido no caso: Elisa e Filipe).

Parece que finalmente, todos compreendem. Na realidade o que os alunos obtiveram foram todos os divisores de 18. A grande dificuldade parece estar ligada ao facto de 1 também ser divisor de 18.

No Refeitório
Lêem e tentam resolver a tarefa, individualmente (ver anexo). Ambos estão bastantes compenetrados na actividade. Júlia começa por desenhar quatro mesas e distribuir seis meninos por cada uma delas (ver fig. 10). Chama a professora e pergunta baixinho:

> J: *Tá* bem? Posso fazer assim, com desenhos, *nê*? Depois vou desenhar as outras duas mesas e os meninos . . .

Figura 10 — Os pacotes de pastéis necessários.

David faz alguns cálculos para saber o total dos meninos (ver fig. 11). Porém a partir daí, sente dificuldades e parecendo um pouco preocupado, não consegue avançar.

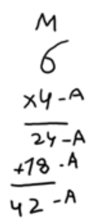


Figura 11 — Os cálculos do David.

Olha para a colega e trocam algumas palavras. Júlia, de tão embevecida na actividade, não lhe presta muita atenção, continuando a desenhar as mesas que faltam e os respectivos meninos. David, visivelmente ansioso, efectua mais uns cálculos sem resultados aparentes. Incomodado pelo burburinho dos colegas sentados imediatamente atrás, vira-se para eles e pede para se calarem: "shiu!". Parece sentir-se apoquentado por não conseguir resolver a questão após tantos cálculos e, ao mesmo tempo, precisar de mais silêncio para se concentrar.

Entretanto Júlia mostra o seu trabalho à professora e explica entusiasmada o seu raciocínio. Então, é estimulada a partilhar ideias com David, o que de imediato acedeu.

> J: Mostra-me o que já fizeste.
>
> D: Fiz estas contas ... Mas primeiro para saber o número de alunos, fiz por uma conta de vezes. A conta que eu fiz foi 6×4 que dava 24 ... $24 + 18$ ia dar 42. Descobri o número de alunos. E agora não sei mais ... Arghh!
>
> J: É mais fácil se fizeres as mesas, os meninos ... e depois ... dás 2 pastéis a cada um ...

David segue a sugestão da colega. Agora um pouco mais animado, desenha apressadamente, mesas, meninos, bolachas ... sôfrego por terminar. Para mostrarem à turma como fizeram, Júlia desenha no quadro do mesmo modo que registou na sua folha de trabalho, enquanto David um pouco nervoso, inicia a apresentação explicando como tinha resolvido parte do problema:

> D: Primeiro para chegarmos à conclusão de 42 meninos fizemos a conta ...

Atrapalhado procura a folha de rascunho onde tinha feito os cálculos. Elisa dá-lhe uma ajuda: "É essa ... *tá cheio* de contas!" Escreve no quadro o algoritmo da multiplicação e continua dizendo:

> D: 6 mesas com 4 meninos, nessas mesas dá 24. Depois, 2 mesas com 9 meninos. Fiz $24 + 18$ que eram essas duas mesas.

Filipe interrompe e pergunta com ar um pouco provocatório:

> F: O que é isso 6×4?

Seguro do que fazia, David não se deixa intimidar e responde:

> D: Eram essas 4 mesas e seis alunos. Depois fiz $24 + 18$ ... 42 meninos.

Até aqui, David mostra firmeza a explicar o seu pensamento. Mas de seguida, menos seguro, prefere que seja Júlia a continuar:

> D: Depois para descobrir o número de pacotes já tive um bocadinho mais de dificuldade e precisei da ajuda da minha colega. Ela vai explicar como fez. O passo seguinte é com a Júlia.

Júlia evidenciando bastante autonomia e confiança aponta para o que tinha esboçado no quadro e elucida a sua abordagem de contagem por múltiplos:

> J: Depois fizemos assim: se cada pacote tem 12 pastéis: $2-4-6-8-10-12$, um pacote; $2-4-6-8-10-12$, outro; $2-4-6-8-10-12$, cortei aqui e formou outro pacote. Depois $2-4-6-8-10-12$, este mais este, dava outro pacote. Depois $1+1+1+1+1+1+1$ dá 7 pacotes.

Júlia expressa com clareza e segurança o seu pensamento. A representação por meio de desenhos facilitou a resolução da questão, ao passo que, a dificuldade sentida por David pode estar relacionada com o facto de acreditar que os problemas se resolvem, apenas, com a aplicação de algoritmos aritméticos e, assim, não procurar outro tipo de abordagem. Continua, todavia, empenhado em colaborar e termina a sua apresentação da seguinte maneira:

> D: E foi assim que nós resolvemos o nosso problema e a nossa resposta foi: foram necessários 7 pacotes.

Júlia evidenciou uma compreensão da situação matemática envolvida, agrupando as bolachas e usando com relativa facilidade o conceito de divisão implícito no problema, o que não aconteceu com David.

Ambos se sentiam felizes e até um pouco orgulhosos com o seu desempenho perante a turma.

A viagem de comboio

Após a leitura da tarefa (ver anexo), procuram a pares encontrar um caminho que os conduza à solução. Decidem começar pelo fim do problema (ver fig. 12), embora sem êxito porque quando deveriam subtrair, adicionam.

> J: Em Lisboa saíram todos, que são 34. Em Coimbra entraram 25. Então é mais 25. Saíram 16. Menos 16 ... não é?
>
> D: Aaahh! Já não aguento mais!

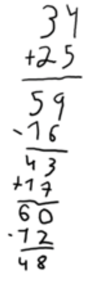


Figura 12 — Estratégia para saber o número de passageiros.

David apresenta alguma exaustão pela quantidade de contas executadas no rascunho e ainda não ter solucionado o problema. Foram encorajados a empregar outro tipo de estratégia, mas tal não se verificou. Apesar de tudo, mantiveram sempre uma atitude de perseverança procurando resolver a questão, embora isso não tenha acontecido no primeiro dia. Nesta fase, o par não conseguiu libertar-se da estratégia inicial e isso foi impeditivo de chegar à solução. No entanto, aquando da discussão na turma, eles parecem ter compreendido a resolução apresentada.

> J: Pois . . . nós devíamos ter feito 34 menos 25 e depois o que desse mais 16 e assim . . .
>
> D: Quando fizemos de mais devia ser de menos. Devíamos ter visto no fim se dava bem . . .

Ao ouvirem as estratégias apresentadas por outros pares, os dois alunos reflectem sobre o seu próprio trabalho, apercebendo-se dos erros cometidos.

O autocarro da escola
Dadas as dificuldades com a tarefa anterior decidiu-se, passados uns dias, propor esta tarefa adicional. Assim, mal acabam de a ler (ver anexo), mostram-se muito animados. Utilizam uma estratégia de tentativa e erro.

> J: *Muita* fácil. É como o do comboio. Podemos fazer como o Pipo disse doutra vez.
>
> D: *Yáá!*
>
> J: Vamos começar por um número qualquer. Diz lá!
>
> D: Então, 16.
>
> J: Vê lá se dá!
>
> D: Não . . . é muito pequeno. Tem que ser mais.
>
> J: Vou ver se dá com outro número. Com o 24 . . . pá . . . não dá . . .
>
> D: Agora o 30 . . . ficaram 41. Boa! São mais 10 . . . *yée!* Acho que entraram 40.
>
> J: Vamos agora, verificar por contas . . .

Empenhados na verificação do resultado (ver fig. 13), mostram-se confiantes no seu desempenho. Demonstram ainda, segurança e autonomia quando apresentam à turma a estratégia desenvolvida por ambos, ao contrário do que tinha acontecido com a tarefa do comboio.

> J: Nós primeiro fizemos por tentativas, depois chegámos ao número correcto que é o 40. A seguir, verificámos por contas se o número que nós descobrimos estava correcto e, estava.
>
> D: Fizemos muitos cálculos . . .

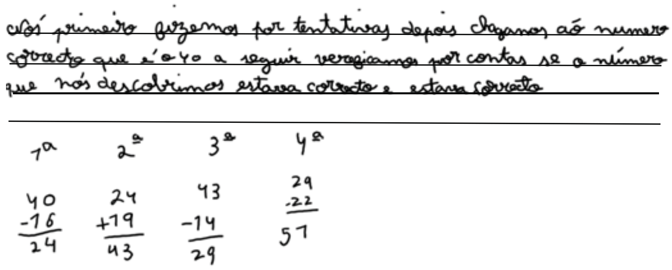


Figura 13 — Verificação dos alunos que seguiam no autocarro.

Enquanto Júlia explica, David executa rapidamente os cálculos no quadro. Não se limitam a apresentar solução, como se empenham na sua verificação. Decidem até utilizar, depois da estratégia inicial de tentativa e erro, a verificação dos resultados obtidos, considerando as operações de adição e subtracção (adicionando sempre que entram passageiros e subtraindo sempre que saem). Mostram que compreenderam a questão e a satisfação reflecte-se nos seus rostos.

Múltiplos de um número

Ao lerem a tarefa (ver anexo) ficam sem saber o que fazer. Após algumas considerações acerca do que poderiam tentar observar, parecem ficar bastante animados com a proposta. Trabalham, cooperativamente, com muita alegria. A motivação é crescente perante as descobertas que surgem consecutivamente e são registadas na folha de trabalho (ver fig. 14). Chegado o momento da discussão com a turma, o par está desejoso por apresentar as suas descobertas: "podemos ser os primeiros?". Apesar de alguma confusão entre algarismo e número, comunicam com autonomia e segurança.

> D: Nos múltiplos de cinco: o algarismo das unidades é sempre 0, 5, 0, 5 ...; o algarismo das dezenas é sempre de 2 em 2 números iguais;

Por vezes, a comunicação não é clara e têm necessidade de explicitar melhor. Podem também surgir críticas dos colegas, mas estão cientes de que, em princípio e de acordo com as normas de sala de aula, devem ser construtivas e, assim sendo, não se sentem incomodados com tal. Evidenciando sentido crítico, por vezes concordam ou, caso contrário, justificam as suas ideias:

> J: Nos múltiplos de 5, um número mais o número que vem a seguir dá sempre o resultado a seguir.
>
> Y: Um número mais um número ... como é que é? Podes explicar melhor?
>
> J: Então, por exemplo: 5 mais 10 dá 15; 10 mais 15 dá 25 ...
>
> Y: Mas ... 15, mais 20 não dá 25, dá 35.
>
> J: Pois é ... não vimos os outros .... Então pronto, esta não vale.

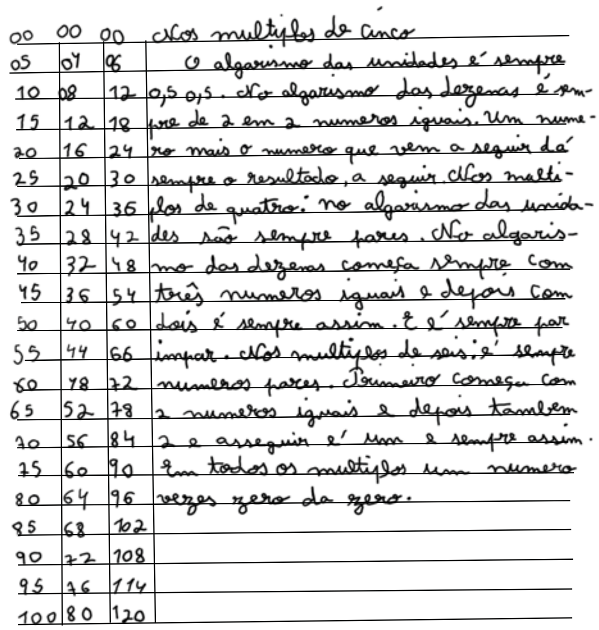


Figura 14 — As descobertas de Júlia e David.

J: Vou continuar. Em todos os múltiplos, um número vezes zero dá zero.

F: Quem não sabe!? Qualquer número a multiplicar por zero dá sempre zero.

D: *Tá* bem! Mas é sempre assim .... Por isso, nós achamos que é uma regularidade.

Confiantes, assumem o zero como sendo múltiplo de qualquer número. Com autonomia, o par prossegue com a apresentação das regularidades que descobriu, indicando-as no retroprojector:

J: Os múltiplos de 4 são sempre pares; o algarismo das dezenas começa sempre com três *números* iguais e depois com dois, e é sempre par, ímpar, par, ímpar, ...

D: Também descobrimos que os múltiplos de 6 são sempre números pares; nos algarismos das dezenas, primeiro começa com dois *números* iguais e depois também com outros dois iguais e a seguir é um diferente, e é sempre assim ... dois iguais, um diferente e depois dois iguais.

Y: Como?

J: (mostrando no acetato) Então, temos $6 \times 0 = 0$ e $6 \times 1 = 6$, nas dezenas é sempre 0 e 0. Depois $6 \times 2 = 12$ e $6 \times 3 = 18$ e nas dezenas é 1 e 1. Depois $6 \times 4 = 24$ e nas dezenas é 2 ...

Y: Ah! Já entendi!

Júlia e David mostram confiança nas suas capacidades e desenvolvimento do poder de argumentação. Visivelmente interessados e empenhados, escutam, com atenção os outros pares e, ao mesmo tempo, tentam encontrar mais alguma regularidade.

Discussão

Ao apresentar as primeiras tarefas, os alunos foram informados que podiam usar estratégias alternativas ao cálculo, partilhar ideias com o par e no final, haveria um momento para a discussão e reflexão com a turma. Tal facto, aliado à natureza das tarefas, provocou bastante admiração por parte dos mesmos, o que leva a inferir que não se coadunava com o seu modo habitual de trabalhar. A sua primeira reacção foi um misto de expectativa e entusiasmo por uma nova experiência. Numa primeira fase e, ainda, pouco familiarizados, os alunos davam por terminado a actividade, mal obtinham uma resposta. Não procuravam encontrar outras possíveis, nem reflectiam sobre o trabalho realizado. Pareciam ansiar, apenas, por mostrar o que já tinham feito, pretendendo a sua imediata validação. Filipe chegou mesmo a contestar: "se a professora não diz se está certo ou errado, como é que eu vou saber?".

Com o decorrer do tempo, os alunos passaram a encarar as actividades com mais naturalidade e, progressivamente, adaptaram-se a este modo de trabalhar. A dependência face à professora tornou-se, gradualmente, atenuada deixando de a solicitar tão repetidamente, fazendo-o só pontualmente e quando absolutamente necessário.

As questões propostas propiciaram interesse e motivação na procura de caminhos conducentes à sua resolução. Excepcionalmente, para Filipe as questões funcionaram como autênticos desafios que as realizava com intenso prazer e facilidade. Entender que os problemas se resolvem, apenas, a partir de destrezas de cálculo pode ter prejudicado a performance de David. Porém, estes alunos superaram algumas dificuldades interagindo com os seus pares. Apesar de, no início, o trabalho a pares ser praticamente nulo ou restringir-se à confirmação dos resultados. Os alunos tendiam a encarar a troca de ideias como desprestigiante, por considerarem que se estava a 'copiar' o trabalho do colega. No caso do Filipe, era agravado pelo facto de considerar o par com um nível de desempenho inferior ao dele. A pouco e pouco, passaram a reconhecer vantagens no trabalho colaborativo e realizavam-no naturalmente com base na inter ajuda e reflexão crítica. Então, constataram que tanto ao explicar como ao ouvir as estratégias do par detectavam pequenos erros de percurso que lhes teriam passado despercebidos se trabalhassem sozinhos. Parece que se aperceberam que não estavam definitivamente a 'copiar', mas sim, a realizar um trabalho conjunto que favorecia os dois.

De sublinhar que, de um modo geral, os alunos pareciam ter preferência por começar a actividade individualmente, e só depois, partilhar ideias com o colega de carteira. Trabalhar a pares implica uma comunicação oral que ocasiona, naturalmente, um ruído de fundo que não existe quando trabalham sozinhos. Tal burburinho, por vezes, mais acentuado pelo fervor dos ânimos parece provocar uma sensação de desconforto a alguns alunos e exigir um maior esforço na concentração do trabalho. Talvez por isso tenham optado pelo trabalho a pares, somente após terem realizado algum individualmente. Aparentemente, a combinação dos dois tipos de trabalho determinou melhor desempenho nos alunos.

Foi possível verificar que a discussão final com a turma foi um dos momentos da actividade que propiciou a reflexão do trabalho realizado. Decorreu claramente nos casos de Filipe, Júlia e David. Também no caso de Elisa, embora com contornos menos definidos. Esta aluna apesar de vir rotulada com um nível de desempenho fraco, mostrava nítida disposição em participar. Ao tentar convencer os outros ou a si próprias, argumentar sobre as suas estratégias, reflectir acerca do seu trabalho e dos colegas, Filipe, Júlia e David, evidenciaram o desenvolvimento de capacidades de raciocínio e comunicação, assim como, a autonomia e o sentido crítico. Elisa, analogamente, pareceu beneficiar com estes momentos, embora num grau menos acentuado. Pode dizer-se que todos beneficiaram da discussão final, em virtude de ser o momento em que podiam partilhar estratégias, esclarecer dúvidas e, sobretudo, reflectir em conjunto acerca do trabalho realizado, desenvolvendo assim o seu pensamento matemático (Schoenfeld, 1996).

O envolvimento nas actividades de natureza investigativa parece ter propiciado a Filipe, Júlia, David e, de alguma forma, a Elisa, uma melhor compreensão para lidar com os números e as operações, na qual se mostraram capazes de transpor os seus conhecimentos, como por exemplo, dos múltiplos de um número e das operações adição, subtracção e multiplicação em diferentes contextos (Bransford *et al.*, 2000; Hiebert *et al.*, 1992). De salientar que os alunos conseguiram resolver questões que tinham implícito o conceito de divisão (por exemplo, a tarefa *O passeio de barco*), usando métodos próprios e tendo como base conhecimentos anteriores.

Em suma, parece que o envolvimento nas actividades matemáticas de natureza investigativa proporcionou momentos de entusiasmo e alegria a estes alunos. Embora em diferentes níveis, também, revelaram interesse e empenho. Ao serem desafiados mostraram motivação e persistência em encontrar o caminho conducente à sua realização. Realizar este tipo de actividades pode desenvolver capacidades como o raciocínio e a comunicação, permitir aprofundar conhecimentos anteriormente estudados, assim como, apropriar-se de novos conceitos, ainda que em níveis diferenciados. Concomitantemente, parece ter desenvolvido nestes alunos hábitos de trabalho colaborativo, o sentido crítico e a autonomia.

Importa ainda dizer que no início deste estudo, foi referido que vivemos numa sociedade cada vez mais exigente em competências indispensáveis que ultrapassam o mero trabalho automatizado. Nesta perspectiva, as actividades matemáticas de natureza investigativa podem propiciar, desde cedo, aos alunos uma interessante experiência de aprendizagem que os capacite a interagir com os outros usando o sentido crítico, a raciocinar perante os desafios propostos, a usar os seus métodos intuitivos, a tornarem-se autónomos e confiantes, para além da oportunidade de poder compreender melhor os factos abordados na aula e adquirir o gosto pela Matemática. Estamos convictas de que a realização de actividades matemáticas de natureza investigativa pelos alunos constitui uma proposta pedagógica privilegiada que pode capacitar o aluno a um pensamento versátil e a uma aprendizagem com compreensão dos factos. Desta forma, não desprezando o papel da rotina, é possível desenvolver outro tipo de capacidades consideradas fundamentais para o século XXI.

Referências bibliográficas

Abrantes, P., Leal, L. e Ponte, J.P. (1996). *Investigar para aprender Matemática: Textos seleccionados.* Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e APM.

Abrantes, P., Serrazina, L. e Oliveira, I. (1999) *A Matemática na Educação. Básica. Reflexão participada sobre os currículos do ensino básico.* Lisboa: Ministério da Educação.

Associação de Professores de Matemática (1988). *Renovação do Currículo de Matemática*. Lisboa: APM.

Baroody, A. J. e Wilkins, J. L. M. (1999). The Development of Informal Counting, Number, and Arithmetic Skills and concepts. Em J. V. Copley (Ed.). *Mathematics in the early years* (pp. 48-65). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Bogdan, R. e Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação.* Porto: Porto Editora.

Bransford, J. D., Brown, A. e Cocking, R. (2000). *How People Learn: Brain, Mind, Experience and School.* Washington. D. C.: National Academy Press.

César, M., Torres, M., Rebelo, M., Castelhano, A., Candeias, N., Candeias, A., Caçador, F., Coração, R., Gonçalves, C., Sousa, R., Malheiro, L., Fonseca, S., Martins, H. e Costa, C., (2000). Interacções na aula de Matemática. Em C. Monteiro, F. Tavares, J. Almiro, J. P. Ponte, J. Matos e J. L. Menezes (Orgs). *Interacções sociais e Matemática: ventos de mudança nas praticas de sala de aula* (pp. 47-83) Viseu: Secção de Educação Matemática da SPCE.

Christiansen, B. e Walter, G. (1986). Task and activity. Em B. Christiansen, A, G. Houwson, e M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.

Hiebert, J. e Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. Em D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar.* Lisboa: APM e IIE.

Pólya, G. (2003). *Como resolver problemas.* Lisboa: Gradiva.

Ponte, J. P. e Matos, J.F. (1996). Processos cognitivos e Interacções Sociais nas Investigações Matemáticas. Em P. Abrantes, L. C. Leal e J. P. Ponte (Orgs.). *Investigar para aprender matemática: Textos seleccionados* (pp. 119-137). Lisboa APM. (tradução do original em inglês publicado em 1992)

Ponte, J. P. e Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1º Ciclo.* Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P. (2003). *À procura da mistura perfeita.* LeiriMat 10 Textos de Conferências e comunicações.

Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? Em P. Abrantes; L. C. Leal e J. P. Ponte (Orgs.). *Investigar para aprender matemática* (pp. 61-71). Lisboa: APM.

Stake, R. E. (1999). *Investigation com estúdio de caso.* Madrid: Morato.

Wood, T., Merkel, G. e Uerkwitz, J. (1996). Criar um ambiente na aula para falar sobre a matemática. *Educação e Matemática*, 40, 39-43.

Worth, J. (1990). Developing Problem-solving Abilities and Attitudes. Em J. N. Payne (Ed.). *Mathematics for the young child* (pp. 39-61). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Yackel, E., Cobb, R., Wood, T., Wheatley, G. e Merckel, G. (1991). A importância da interacção social na construção do conhecimento matemático das crianças. *Educação e Matemática*, 18, 17-21.

Yackel, E. e Cobb, R., (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 27(4), 458-477.

Yin, R. K., (1989). *Case study research: design and methods*. Newbury Park: Sage Publications.

Tarefas

O passeio de barco

Um grupo de amigos resolveu ir passear de barco. Como tinham barcos em número suficiente, decidiram que ficasse o mesmo número de amigos em cada barco.
Descobre todas as maneiras diferentes dos 18 amigos se agruparem nos barcos. Para cada caso regista quantos barcos usaram e quantos amigos iam em cada barco.

No refeitório

No refeitório havia:
Quatro mesas com seis alunos e duas com nove. Para sobremesa, cada aluno teve dois pastéis. Os pastéis vendem-se em pacotes. Cada pacote tem 12 pastéis.
Quantos pacotes foram necessários para estes alunos?

A viagem de comboio

Um comboio partiu de Viana do Castelo com destino a Lisboa, com paragens no Porto e Coimbra. No Porto saíram 12 passageiros e entraram 17. Em Coimbra saíram 16 passageiros e entraram 25. Em Lisboa saíram todos os passageiros, que eram 34.
Quantos passageiros entraram em Viana do Castelo?

O autocarro da escola

O autocarro da escola partiu da Flamenga com destino ao Bairro Novo com paragens na EB2 Rouxinol e EB1 Flores. Na EB2 Rouxinol saíram 16 alunos e entraram 19. Na EB1 Flores saíram 14 alunos e entraram 22. No Bairro Novo saíram todos os alunos que eram 51.
Quantos entraram na Flamenga?

Múltiplos de um número

Escreve em coluna os 20 primeiros múltiplos de 5.

- Repara nos algarismos das unidades e das dezenas. Encontras algumas regularidades?
- Investiga agora o que acontece com os múltiplos de 4 e 6.
- Investiga para outros números.

Resumo. O presente artigo procura compreender de que modo os alunos se envolvem em actividades matemáticas de natureza investigativa. Utilizou uma metodologia qualitativa e interpretativa, apresentando os casos de quatro alunos com níveis de desempenho diferenciados, de uma turma do 3º ano de escolaridade, leccionada pela primeira autora deste texto. A recolha de dados foi realizada por observação participante, apoiada em i)gravações áudio e vídeo das aulas, e ii) documentos produzidos pelos alunos. Também as conversas informais com os alunos foram um contributo bastante valioso.

Os dados mostram que os alunos, inicialmente, davam por terminada a actividade, assim que obtinham uma resposta e não procuravam encontrar outras possíveis, pedindo a imediata validação do trabalho. No entanto, à medida que o estudo ia progredindo, a maioria dos alunos deixa de ser tão dependente da professora e assume uma atitude mais crítica relativamente ao seu trabalho. Passa a encarar as actividades com mais naturalidade e, progressivamente, vai-se adaptando a este modo de trabalhar. O estudo conclui, que na generalidade, o envolvimento nas actividades matemáticas de natureza investigativa proporcionou momentos de entusiasmo e alegria. Ao serem desafiados, os alunos, mostraram motivação e persistência em encontrar o caminho conducente à sua realização. Tal envolvimento, além de desenvolver capacidades como o raciocínio e a comunicação, permitiu aprofundar conhecimentos anteriormente estudados, assim como, a apropriação de novos conceitos, ao mesmo tempo, que desenvolveu hábitos de trabalho cooperativo, sentido crítico e autonomia.

Palavras-chave: Aprendizagem; Tarefas matemáticas; Actividades matemáticas de natureza investigativa; Ambiente de sala de aula.

Abstract. This study, based on a research study, has the goal of understanding how pupils get involved in mathematical investigative activities. Accordingly to the study's goals, it follows a qualitative investigative approach, based on case studies of four pupils with differentiated performances, from a 3rd grade class, teached by the first author. The data was gathered by participant observation, backed up in i) audio/video recording of lessons and ii) documents made by students. Informal pupils' conversation was a great contribution, also.

Initially, pupils carried out the activities and, as soon as they obtained an answer, they asked for the immediate validation of their work, without seeking another possible answer. However, as the study evolved, most part of pupils abandons teacher's dependency and assumes a more critical posture about its own work. The activities are now faced more naturally and, progressively, pupil nhs tend to adapt to this way of working.

Generally, involvement in mathematical investigative activities has provided enthusiastic and joyful moments. As they were challenged, determined students revealed self-motivation and persistency in finding the way to activities' resolution. This involvement, besides developing reasoning and communication, it has allowed to deepen subjects already studied and the acknowledgment of new concepts and it has developed cooperation in work, critical sense and autonomy.

Key-words: Learning; Mathematical tasks; Mathematical investigative activities; Classroom environments.

▪▪▪

ANA MARIA DE JESUS
Escola EB1/JI de Santo António dos Cavaleiros
ana.jes@clix.pt

LURDES SERRAZINA
ESE de Lisboa
lurdess@eselx.ipl.pt